Prof. T. Nipkow
M. Eberl, J. Rädle, S. Wimmer
Technische Universität München

KEINE ABGABE

Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2019 – Übungsblatt 7

AUFGABE 7.1. (*Wichtige Begriffe*) Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die Folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- PDA
- Kelleralphabet und -höhe
- Konversion CFG $\leftrightarrow$ PDA
- Unterschied $\mathsf{L}_\varepsilon(A)$ und $\mathsf{L}_\mathsf{F}(A)$ für einen PDA A

Notation

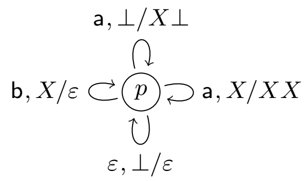
Notation von PDA-Regeln: Anstatt der in den Folien verwendeten Schreibweise $(q, YZ) \in \delta(p, \mathsf{a}, X)$ für die Ersetzungsregeln eines PDA kann man alternativ schreiben: $pX \xrightarrow{\mathsf{a}} qYZ$ $(p, q \in \mathsf{Q},\ X, Y, Z \in \Gamma,\ \mathsf{a} \in \Sigma)$.
Für den PDA mit δ:

$$\delta(p, \mathsf{a}, \perp) = \{(p, X\perp)\} \qquad \delta(p, \mathsf{a}, X) = \{(p, XX)\} \qquad \delta(p, \mathsf{b}, X) = \{(p, \varepsilon)\} \qquad \delta(p, \varepsilon, \perp) = \{(p, \varepsilon)\}$$

schreibt man daher alternativ:

$$p\perp \xrightarrow{\mathsf{a}} pX\perp \qquad pX \xrightarrow{\mathsf{a}} pXX \qquad pX \xrightarrow{\mathsf{b}} p \qquad p\perp \xrightarrow{\varepsilon} p$$

oder stellt diesen als Graph mit Knotenmenge Q dar, wobei die Kante (p, q) dann mit "$\mathsf{a}, X/YZ$" beschriftet ist (siehe *Hopcroft et al., Introduction to Automata Theory, Kapitel 6*):



AUFGABE 7.2. (*Automata Tutor*)

In Automata Tutor finden Sie neue Übungsaufgaben zu PDA's. Dort haben Sie auch die Möglichkeit Ihre PDA's Stufe B
auf konkreten Eingaben zu simulieren.

AUFGABE 7.3. (*Pushdown-Automata / Kellerautomaten*) Stufe B/C

Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils einen Kellerautomaten A_i in allen oben aufgeführten Darstellungsarten an, so dass $\mathsf{L}_i = \mathsf{L}(\mathsf{A}_i)$. Der Automat soll mit **leerem Stack** akzeptieren. Geben Sie dann zusätzlich für jeden Automaten jeweils ein nicht-leeres Wort w mit akzeptierendem Lauf an.

(a) $\mathsf{L}_1 = \{\mathsf{a}^n\mathsf{b}^{3n} \mid n \geq 0\}$
(b) $\mathsf{L}_2 = \{\mathsf{a}^n\mathsf{b}^m \in \{\mathsf{a},\mathsf{b}\}^* \mid n \leq m \leq 2n\}$
(c) $\mathsf{L}_3 = \{w \in \{\mathsf{a},\mathsf{b}\}^* \mid 2 \cdot |w|_\mathsf{a} = 3 \cdot |w|_\mathsf{b}\}$

AUFGABE 7.4. (*CFG $\longleftrightarrow$ PDA*) Stufe C

Wie Sie in der Vorlesung gesehen haben (Folie 214ff), können kontextfreie Grammatiken und Pushdown-Automaten sich gegenseitig simulieren. Wir üben nun diese Übersetzungen zwischen CFG und PDA.

(a) Überführen Sie die folgende CFG $\mathsf{G} = (\{\mathsf{S}\}, \{\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c}\}, \mathsf{P}, \mathsf{S})$ mithilfe von Satz 4.57 in einen PDA M mit $\mathsf{L}_\varepsilon(M) = \mathsf{L}(\mathsf{G})$:

$$\mathsf{S} \rightarrow \mathsf{SS} \mid \mathsf{aSb} \mid \mathsf{bSa} \mid \mathsf{c}$$

(b) Übersetzen Sie den folgenden PDA $M = (\{q, p\}, \{a, b\}, \{\perp, A, B\}, q, \perp, \delta)$ in eine CFG G mit $\mathsf{L}_\varepsilon(M) = \mathsf{L}(\mathsf{G})$, wobei δ definiert ist durch:

$$\delta(q, a, \perp) = \{(q, A)\} \quad \delta(q, a, A) = \{(q, AA)\} \quad \delta(q, b, A) = \{(p, \varepsilon)\} \quad \delta(p, b, A) = \{(p, \varepsilon)\} \quad \delta(q, b, \perp) = \{(q, \varepsilon)\}$$

AUFGABE 7.5. (*Kelleralphabet beschränken*)

Wir beschränken die Größe des Kelleralphabets Γ von PDAs und zeigen, dass jede kontextfreie Sprache von einem Stufe D
PDA mit $|\Gamma| = 2$ erkannt werden kann. Skizzieren Sie hierzu eine allgemeine Übersetzung von einem PDA mit
$|\Gamma| > 2$ zu einem PDA mit $|\Gamma'| = 2$, so dass beide Automaten die gleiche Sprache erkennen. Stufe D

AUFGABE 7.6. (*Kellerhöhe beschränken*)
Wir beschränken die Kellerhöhe von PDAs auf maximal k Kellerzeichen und nennen diese PDAs *k-bounded-Stack-PDA*. Insbesonders kann ein solcher PDA keine PUSH-Operationen ausführen sollten danach mehr als k Symbole auf dem Stack liegen. Zeigen Sie, dass k-bounded-Stack-PDA genau die regulären Sprachen erkennen, indem Sie eine allgemeine Übersetzung von PDAs zu $\varepsilon-$NFA angeben.

AUFGABE 7.7. (*Deterministische PDAs*) Stufe D
In der Vorlesung haben Sie Lemma 4.68 ohne Beweis gesehen:
Sei $\mathsf{L} \subseteq \Sigma^*$. Dann sind äquivalent:
(a) Es gibt einen DPDA D mit $\mathsf{L}_\varepsilon(D) = \mathsf{L}$
(b) Es gibt einen DPDA D' mit $\mathsf{L}_F(D') = \mathsf{L}$ **und** kein Wort aus L ist ein echtes Präfix von einem anderen Wort aus L.
Zeigen Sie diese Äquivalenz.

AUFGABE 7.8. (*Zählerautomaten*) Stufe E
Wir beschränken in dieser Aufgabe das Kelleralphabet von PDAs auf nur ein einziges Symbol und untersuchen die Ausdrucksmächtigkeit dieser Automaten etwas genauer.
(a) Geben Sie eine äquivalente Formulierung als Automaten, die statt des Kellers einen Zähler verwenden, an.
(b) Geben Sie einen solchen Automaten an, der eine nicht reguläre Sprache akzeptiert.
(c) Nun betrachten wir eine Variante, die zusätzlich noch ein Kellersymbol erlaubt, um den Anfang des Kellers zu markieren. Geben Sie wieder eine Charakterisierung mit Zählern an und einen Automaten, der eine kontextfreie Sprache akzeptiert, die von keinem Automaten im vorherigen Modell akzeptiert wird.
(d) Geben Sie eine kontextfreie Sprache an, die von keiner der betrachteten Automatenklassen akzeptiert wird.
Knobelaufgaben: Die folgenden Aufgaben können alle unabhängig voneinander gelöst werden:
(a) Geben Sie einen solchen Automaten an, der die Sprache $\overline{L}$ für $L = \{ww^R \mid w \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^*\}$ akzeptiert.
(b) Nun betrachten wir deterministische Varianten dieser Automaten. Zeigen Sie zunächst, dass die Klasse dieser deterministischen Automaten unter dem Sprachkomplement abgeschlossen ist.
(c) Zeigen Sie, dass kein deterministischer Zählerautomat die Sprache L akzeptiert. *Hinweis:* Wie viele verschiedene Zustände kann ein Automat beim Lesen von Worten der Länge n erreichen?
(d) Zeigen Sie aus den vorherigen Aussagen, dass nichtdeterministische Automaten mit einem Zähler strikt mächtiger sind als deterministische Automaten mit beliebig vielen Zählern.