Prof. T. Nipkow
M. Eberl, J. Rädle, S. Wimmer

Technische Universität München

KEINE ABGABE

Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2019 – Übungsblatt 9

AUFGABE 9.1. (*Wichtige Begriffe*) Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die Folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- WHILE-Programme
- GOTO-Programme
- enscheidbar
- charakteristische Funktion
- spezielles Halteproblem
- allgemeines Halteproblem
- reduzierbar
- semi-entscheidbar
- rekursiv-aufzählbar
- Reduktion
- Satz von Rice

AUFGABE 9.2. (*Entscheidbarkeit vs. Berechenbarkeit*) Stufe B

Ordnen Sie die folgenden Satzanfänge den Satzenden so zu, dass richtige Aussagen entstehen. Sei dazu $\mathsf{A}, \mathsf{B} \subseteq \{0,1\}^*$:

(a) Die Funktion χ_A ist berechenbar,
(b) Die Funktion χ'_A ist berechenbar,
(c) A ist entscheidbar,
(d) B ist nicht entscheidbar,

(i) wenn $\mathsf{A} \leq \mathsf{B}$ gilt und B entscheidbar ist.
(ii) wenn A rekursiv aufzählbar ist.
(iii) wenn A entscheidbar ist.
(iv) wenn $\mathsf{A} \leq \mathsf{B}$ gilt und A nicht entscheidbar ist.

AUFGABE 9.3. (*Länge von Wörtern*) Stufe B

Diskutieren Sie, wie viele Schritte eine Turing-Maschine mindestens machen muss, um zu entscheiden, ob für eine Eingabe w gilt: $|w| \geq 314$.

AUFGABE 9.4. (*Reduktionen*) Stufe B

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen korrekt oder inkorrekt sind, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie einen Beweis bzw. ein passendes Gegenbeispiel angeben. Sei $\Sigma = \{0,1\}$.

(a) $\forall A \subseteq \Sigma^*.\ A \leq \Sigma^*$
(b) $\forall A, B \subseteq \Sigma^*.\ A \leq B \iff \overline{A} \leq \overline{B}$
(c) $\forall A \subseteq \Sigma^*.\ A \neq \emptyset \wedge A \neq \Sigma^* \implies A \leq \overline{A}$
(d) $\forall A, B, C \subseteq \Sigma^*.\ A \leq B \wedge B \leq C \implies A \leq C$

AUFGABE 9.5. (*Entscheidbarkeit*) Stufe B/C

Entscheiden Sie, ob die folgenden Behauptungen korrekt oder inkorrekt sind. Begründen Sie dann Ihre Antworten wie folgt: Wenn L entscheidbar bzw. semi-entscheidbar ist, beschreiben Sie einen Algorithmus, der die charakteristische Funktion χ_L bzw. die Funktion χ'_L berechnet. Wenn L unentscheidbar ist, leiten Sie einen Widerspruch zu einem Ergebnis der Vorlesung ab.

(a) Wenn A und B entscheidbare Sprachen sind, dann ist $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ entscheidbar.
(b) Wenn A und $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ entscheidbar sind, dann ist B entscheidbar.
(c) Das Problem, ob $\mathsf{L}_H(\mathsf{M}) \neq \emptyset$ für eine gegebene Turingmaschine M gilt, ist semi-entscheidbar.
(d) Das Problem, ob $\mathsf{L}_H(\mathsf{M}) = \emptyset$ für eine gegebene Turingmaschine M gilt, ist semi-entscheidbar.

AUFGABE 9.6. (*Reduktionen und Unentscheidbarkeit*) Stufe C

In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass das angegebene Problem unentscheidbar ist, indem Sie eine passende Reduktion von einem unentscheidbaren Problem angeben.

Beispiel:

Es ist unentscheidbar, ob eine Turing-Maschine für alle Eingaben 0 *ausgibt.* Formal heißt dies, dass wir zeigen wollen, dass $V_0 := \{\mathsf{enc}(\mathsf{M}) \mid \forall \mathsf{x} \in \Sigma^*.\ \varphi_{\mathsf{enc}(\mathsf{M})}(\mathsf{x}) = 0\}$ unentscheidbar ist. Wir tun dies, indem wir das Komplement des speziellen Halteproblems auf V_0 reduzieren, wobei das Halteproblem so definiert ist: $\mathsf{K} := \{w \mid \exists \mathsf{M}. \mathsf{M} = \mathsf{dec}(w) \wedge \mathsf{M}[w]\downarrow\}$. dec ist dabei eine Funktion, die ein Encoding einer TM auf die entsprechende TM abbildet. Gegeben ein Wort, das keine TM encodiert, ist dec undefiniert.

Reduktion von $\overline{\mathsf{K}}$*:* Wir konstruieren für ein gegebenes Encoding $\mathsf{enc}(\mathsf{M})$ eine Turing-Maschine M' mit Eingabe $\mathsf{x} \in \{0,1\}^*$ wie folgt: Wir simulieren die Turing-Maschine M auf $\mathsf{enc}(\mathsf{M})$ für $|\mathsf{x}|$ viele Schritte. Falls M nicht innerhalb von $|\mathsf{x}|$ vielen Schritten hält, dann geben wir 0 aus, ansonsten 1.

Die Reduktion ist berechenbar, weil wir das Encoding von Turing-Maschinen berechnen können und Turing-Maschinen anhand ihres Encodings für eine begrenzte Anzahl an Schritten simulieren können.

Die Reduktion ist korrekt, weil... Angenommen, $\mathsf{enc}(\mathsf{M}) \in \overline{\mathsf{K}}$. Dann hält die Simulation der Turing-Maschine M auf Eingabe $\mathsf{enc}(\mathsf{M})$ während der Ausführung der Turing-Maschine M' für keine Eingabe x. Das heißt, die Turing-Maschine M' gibt immer 0 aus.

Angenommen, $\mathsf{enc}(\mathsf{M}) \in \mathsf{K}$. Dann gibt es eine natürliche Zahl t, so dass die Simulation von M in t Schritten auf $\mathsf{enc}(\mathsf{M})$ hält. Dann gibt die Turing-Maschine M' den Wert 1 für alle Eingaben der Länge größer oder gleich t aus.

Damit ist die folgende Funktion eine Reduktion von $\overline{\mathsf{K}}$ auf V_o: Sei $y \in V_0$.

$$i \mapsto \begin{cases} \mathsf{enc}(\mathsf{M}') & \text{falls } i = \mathsf{enc}(\mathsf{M}) \text{ für eine Turing-Maschine M} \\ y & \text{ansonsten} \end{cases}$$

Der Fall falls i kein Encoding einer TM ist, ist wichtig, damit die Funktion total ist. Da K nur TMs enthält, sind alle Worte, die keine TM encodieren in $\overline{\mathsf{K}}$, und müssen folglich auf ein Element von V_0 abgebildet werden.

Zeigen Sie: Es ist unentscheidbar zu prüfen, ob für zwei als Eingabe gegebene Turing-Maschinen die eine auf allen Eingaben genau dann hält, wenn die andere nicht hält.
Zeigen Sie auch, dass dieses Problem nicht semi-entscheidbar ist.

AUFGABE 9.7. (*Collatz-Vermutung*) Stufe D

Zu einem Startwert $a_0 \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ wie folgt:

$$a_{n+1} := \begin{cases} a_n/2 & a_n \text{ gerade} \\ 3a_n + 1 & a_n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die seit 1937 unbewiesene Collatz-Vermutung besagt:

Für alle positiven Startwerte $a_0 \in \mathbb{N}$ gibt es einen Index $i \in \mathbb{N}_0$, so dass $a_i = 1$.

Nehmen Sie an, es gibt ein Programm N, welches als Eingabe ein WHILE-Programm P mit genau einer Eingabevariable nimmt und zu jedem solchen P angibt, ob P die Nullfunktion berechnet. *Zeigen Sie, dass Sie dann die Collatz-Vermutung beweisen oder widerlegen können.*

Hinweise:
- Geben Sie auch das WHILE-Programm P, das sie für Ihren Beweis verwendet haben, an.
- Sie dürfen jede Syntax, die in den Folien für WHILE-Programme eingeführt worden ist, verwenden.

```
x := x - 1;
WHILE x ≠ 0 DO
  x := x + 1;
  c := 2;
  z := x MOD c;
  IF z = 0 DO
    x := x DIV c
  ELSE
    z := x + x;
    x := x + z;
    x := x + 1
  END;
  x := x - 1
END;
y := 0
```

AUFGABE 9.8. (*Semi-Entscheidbarkeit*) Stufe D

Sei $A \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie die folgende Behauptung:

A ist semi-entscheidbar gdw. A ist Wertebereich einer berechenbaren Funktion