Prof. T. Nipkow
M. Eberl, J. Rädle, S. Wimmer
Technische Universität München
HANDSCHRIFTLICHE ABGABE **5 Punkte**
Abgabefrist: Montag, 01.07.2019, 14 Uhr

Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2019 – Hausaufgabenblatt Lösungsskizze 9

Handschriftliche Abgabe

Formale Kriterien zu handschriftlichen Abgaben entnehmen Sie bitte der Website `https://www21.in.tum.de/teaching/theo/SS19`.

AUFGABE 9.1. (*Fragen zu Entscheidbarkeit und Reduktionen*) 3 Punkte

(a) Ist es entscheidbar, ob bei der Ausführung eines WHILE-Programms P auf Eingabe 0 eine bestimmte Anweisung 1000 Mal erreicht wird? Begründen Sie Ihre Behauptung.
(b) Wir betrachten eine modifizierte WHILE-Sprache, in der die Anzahl der Variablen auf 100 beschränkt ist. Ist das Halteproblem für solche WHILE-Programme entscheidbar? Begründung!
(c) Seien $A, B \subseteq \{0,1\}^*$ und A sei reduzierbar auf B, d.h. $A \leq B$. Beweisen oder widerlegen Sie: Wenn B regulär ist, dann ist auch A regulär.

Lösungsskizze

(a) Die Eigenschaft ist für WHILE-Programme unentscheidbar. Wäre sie entscheidbar so wäre es auch das Halteproblem für WHILE-Programme auf Eingabe 0 (dessen Unentscheidbarkeit kann man analog zum Halteproblem auf leerem Band bei Turingmaschinen zeigen). Dafür genügt folgende Konstruktion: Sei P ein WHILE-Programm und sei x_0 o.B.d.A. eine Variable, die in P nicht vorkommt. Man konstruiert nun ein Progamm P':

$$P; x_0 := 1;\ \ WHILE\ x_0 \neq 0\ DO\ x_0 := x_0 + 1;\ \ END\,.$$

Dann erfüllt P' die Eigenschaft, dass die Anweisung "$x_0 := x_0 + 1$" auf Eingabe 0 1000 Mal erreicht wird genau dann, wenn das ursprüngliche Programm terminiert.
(b) Nein, ist es nicht. Laut Vorlesung könnten wir eine beliebige TM (mit einem Band) in ein WHILE-Programm mit nur vier Programmvariablen übersetzen. Damit könnten wir das Halteproblem für TMs entscheiden: Gegegeben die Eingabe $w\#x$ bestehend aus der Kodierung w einer TM M_w und dem Wort x, können wir zuerst die Übersetzung in ein äquivalentes WHILE-Programm P durchführen und dann das Halteproblem für x (genauer für die Kodierung $(x)_n$ von x für $n := |\Gamma_w|$, die Größe des Kelleralphabets von M_w) auf P entscheiden. Falls die Eingabe nicht diese Form hat, bilden wir sie auf $\perp$ ab. Diese Reduktion (nennen wir sie f) ist total und berechenbar und es gilt offensichtlich $v \in H \iff f(v) \in \{(P, x) \mid P[(x)_{|\Gamma_w|}] \downarrow\}$. Analog zur Übung haben wir hier folgende Definition für das Halteproblem verwendet:

$$H := \{w\#x \mid \exists M.\, enc(w) = M \wedge M[x] \downarrow\}$$

(c) Wir widerlegen die Aussage.
Sei A eine kontextfreie Sprache, die nicht regulär ist. Dann ist A entscheidbar und es gibt eine totale berechenbare charakteristische Funktion $\chi : \Sigma^* \to \mathsf{N}$.
Wir kodieren 1 und 0 aus N entsprechend als Wort aus Σ^* und bezeichnen die χ entsprechende Abbildung als $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$. Wir setzen $B = \{1\} \subseteq \Sigma^*$. Dann ist f offenbar eine Reduktion von A auf B und B ist regulär. Widerspruch!

AUFGABE 9.2. (*Unentscheidbare Probleme*) 2 Punkte

Sei $\Sigma = \{0,1\}$ und M_{w_0} eine Turingmaschine mit $\mathsf{L}(M_{w_0}) \neq \emptyset$.
(a) Sei $\mathsf{L}_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \exists M.\, M = enc(w) \wedge M$ hält auf allen Eingaben aus $\mathsf{L}(M_{w_0})\}$. Zeigen Sie, dass L_1 nicht entscheidbar ist.
(b) Sei $\mathsf{L}_2 = \{(v, w) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid \exists M_1, M_2.\, M_1 = enc(v) \wedge M_2 = enc(w) \wedge \mathsf{L}(M_1) = \mathsf{L}(M_2)\}$. Zeigen Sie, dass L_2 nicht semi-entscheidbar ist.

Lösungsskizze

(a) Wir reduzieren H_0 auf L_1: Für einen gegebenen Code einer Turingmaschine w sei $w' = f(w)$ der Code einer Turingmaschine $M_{w'}$, die zunächst die Ausführung von M_w auf dem leeren Band simuliert. Dann gilt

$$w \in H_0 \iff M_w[\varepsilon] \downarrow \iff (\forall v \in \mathsf{L}(M_{w_0}).\, M_{w'}[v] \downarrow)\ .$$

Für den Fall, dass w keinen Code einer TM darstellt, definieren wir $f(w) = w$. Damit ist $w \in H_0$ genau dann wenn $w' \in \mathsf{L}_1$. Zudem ist die Abbildung f, die diese Konstruktion beschreibt, offensichtlich total und berechenbar. Es folgt $H_0 \leq \mathsf{L}_1$ und damit ist L_1 unentscheidbar.

(b) Wir zeigen die Aussage, indem wir die Reduktion $\overline{K} \leq \mathsf{L}_2$ beweisen. Sei v_1 die Kodierung einer Maschine, für die $\mathsf{L}(M_{v_1}) = \emptyset$ gilt. Wir definieren die Reduktion f_1 folgendermaßen. Gegeben die Kodierung $w \in \Sigma^*$ einer Turingmaschine, sei $g(w)$ die Kodierung einer Maschine, die die Eingabe vom Band löscht und dann M_w auf w simuliert. Falls w keine valide Kodierung darstellt, dann $g(w) = w$. Sei nun $f_1(w) = (g(w), v_1)$. Die Funktionen g und f sind offensichtlich berechenbar und total. Zudem gilt für den Fall, dass w die Kodierung einer TM darstellt:

$$w \in \overline{K} \iff \neg M_w[w] \downarrow \iff \mathsf{L}(g(w)) = \emptyset \iff f_1(w) \in \mathsf{L}_2$$

Für den Fall, dass w nicht die Kodierung einer TM darstellt, erhalten wir $w \notin \overline{K}$ und $f_1(w) = (w, v_1) \notin \mathsf{L}_2$. Insgesamt haben wir also $\overline{K} \leq \mathsf{L}_2$ bewiesen.