Prof. T. Nipkow
M. Eberl, J. Rädle, S. Wimmer

Technische Universität München

HANDSCHRIFTLICHE ABGABE **5 Punkte**

Abgabefrist: Montag, 08.07.2019, 14 Uhr

Einführung in die theoretische Informatik

Sommersemester 2019 – Hausaufgabenblatt Lösungsskizze 10

Handschriftliche Abgabe

Formale Kriterien zu handschriftlichen Abgaben entnehmen Sie bitte der Website `https://www21.in.tum.de/teaching/theo/SS19`.

AUFGABE 10.1. (*Entscheidbarkeit*) 1,5 Punkte

Geben Sie für jede der folgenden Mengen an, ob sie entscheidbar ist oder nicht. Beweisen Sie ihre Behauptungen.

(a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w(0) = 0\}$.

(b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w(w) = w\}$.

(c) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_0(0) = w\}$.

Lösungsskizze

(a) L_1 ist unentscheidbar. Beweis: Man setzt $F = \{f \mid f \text{ berechenbar } \wedge f(0) = 0\}$. Es gilt $F \neq \emptyset$ und es gibt Funktionen $\varphi_w \notin F$. Damit ist der Satz von Rice mit $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \varphi_w \in F\}$ anwendbar und es folgt die Behauptung.

(b) Rice ist nicht anwendbar, weil die Eigenschaft $\varphi_w(w) = w$ keine Eigenschaft einer Funktion ist, sondern eine Relation zwischen der Funktion φ_w und der Kodierung w ist. Insbesondere ist es nicht möglich eine Menge F von Funktionen anzugeben, so dass $L_2 = \{w \mid \varphi_w \in F\}$ gilt, da F hierbei von w abhängen müsste.

Reduktion z.B. von H_0: Für w wird eine TM konstruiert, die $M_w[\varepsilon]$ simuliert und bei Halten ihre ursprüngliche Eingabe zurückgibt.

(c) Trivial entscheidbar, da $L_3 = \{\varphi_0(0)\}$ eine einelementige Menge ist.

AUFGABE 10.2. (*Quiz*) 1 Punkt

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Geben Sie jeweils ein Beispiel für die folgenden Objekte an. Falls kein solches Objekt existiert, begründen Sie dies.

(a) Eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, die nicht berechenbar aber total ist.

(b) Eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$, die nicht rekursiv aufzählbar ist und deren Komplement ebenfalls nicht rekursiv aufzählbar ist.

Lösungsskizze

(a) Z.B. χ_H oder jede charakteristische Funktion einer unentscheidbaren Menge.

(b) Man nehme $\{w \in \Sigma^* \mid \forall v.\, \varphi_w(v) \neq \bot\}$, die Menge aller terminierenden Programme.

AUFGABE 10.3. (*PCP*) 0,5 Punkte

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Sei $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ein Post'sches Korrespondenzproblem über einem beliebigen Alphabet Σ mit $p_i = (x_i, y_i)$ und $|x_i| = |y_i|$ für alle $i \in [1, n]$. Dann ist P entscheidbar.

2 Punkte

Lösungsskizze
Wahr! Beweis: Jede Lösung muss mit einem i mit $x_i = y_i$ beginnen. Wir wissen somit:

(a) Ein solches i ist bereits eine Lösung.

(b) Falls es ein solches i nicht gibt, dann existiert auch keine Lösung.

D.h. das P hat eine Lösung gdw. $\exists i.\, x_i = y_i$. Da es nur endlich viele Paare p_i gibt, ist P entscheidbar.

AUFGABE 10.4. (*Rekursive Aufzählbarkeit*)
Man kann Algorithmen für rekursiv aufzählbare Mengen oft auch als Suche nach einem Zeugen für die Aussage, dass sich ein gewisses Element x in der rekursiv aufzählbaren Menge befindet, betrachten. Diese Aufgabe soll diesen Zusammenhang genauer beleuchten.
Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Wir bezeichnen eine binäre Relation R über Wörtern aus Σ^* als *entscheidbar*, wenn die Menge

$$\{x\#y \mid R(x, y) \wedge x, y \in \Sigma^*\}$$

entscheidbar ist.
Sei $A \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass A genau dann rekursiv aufzählbar ist, wenn es eine entscheidbare binäre Relation R mit der folgenden Eigenschaft gibt:

$$A = \{x \mid \exists y.\, R(x, y) \wedge x, y \in \Sigma^*\}$$

Lösungsskizze
Wir zeigen die beiden der Richtungen der Äquivalenz.
Sei $A \subseteq \Sigma^*$ rekursiv aufzählbar. Dann gibt es eine TM M mit $\mathsf{L}(M) = A$. Wir definieren

$$R := \{(x, y) \mid x, y \in \Sigma^* \wedge M \,\text{akzeptiert}\, x \,\text{in}\, |y| \text{ Schritten}\}\,.$$

Dann gilt für $x \in \Sigma^*$:

$$x \in A \iff x \in \mathsf{L}(M) \iff \exists n.\, M \,\text{akzeptiert}\, x \,\text{in}\, n \,\text{Schritten} \iff \exists y \in \Sigma^*.\, (x, y) \in R$$

Damit folgt $A = \{x \mid \exists y.\, R(x, y) \wedge x, y \in \Sigma^*\}$. Zudem ist R entscheidbar, da wir lediglich M für eine begrenzte Anzahl von Schritten simulieren müssen.
Sei $A = \{x \mid \exists y.\, R(x, y) \wedge x, y \in \Sigma^*\}$ für eine entscheidbare binäre Relation R. Dann gibt es eine TM M mit $\mathsf{L}(M) = \{x\#y \mid R(x, y) \wedge x, y \in \Sigma^*\}$. Wir konstruieren die TM M' folgendermaßen:

- Wir bezeichnen die Eingabe als x.
- Teste ob $x \in \Sigma^*$. Falls nein, halte in einem Nicht-Endzustand.
- Zähle nacheinander alle $y \in \Sigma^*$ (z.B. nach aufsteigender Länge und lexikographischer Ordnung) auf.
- Für jedes $y \in \Sigma^*$, simuliere M auf der Eingabe $x\#y$, um zu entscheiden, ob $(x, y) \in R$. Falls ja, halte in einem Endzustand. Falls nein, fahre mit dem nächsten $y' \in \Sigma^*$ fort.

Dann gilt:

$$x \in A \iff \exists y.\, R(x, y) \wedge x, y \in \Sigma^* \iff x \in \Sigma^* \wedge (\exists y \in \Sigma^*.\, M \,\text{akzeptiert}\, x\#y) \iff x \in \mathsf{L}(M')$$

Somit $\mathsf{L}(M') = A$. Damit ist A rekursiv aufzählbar.

Alternativ für die Hinrichtung: Sei $A \subseteq \Sigma^*$ rekursiv aufzählbar. Dann existiert eine berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to A$ mit $A = f(\mathbb{N})$. Wir definieren $R := \{(x, y) \mid x, y \in \Sigma^* \wedge f(|y|) = x\}$. Dann gilt für $x \in \Sigma^*$:

$$x \in A \iff x \in f(\mathbb{N}) \iff \exists n \in \mathbb{N}.\, f(n) = x \iff \exists y \in \Sigma^*.\, (x, y) \in R$$

R ist entscheidbar, da f berechenbar ist.