

Einführung in die theoretische Informatik
Sommersemester 2019 – Knobelblatt 1

Dieses Blatt enthält Knobelaufgaben. Diese Aufgaben werden nicht bepunktet und sind *besonders schwer*. Einige von ihnen benötigen zusätzliche Recherche oder Wissen, das über das der Vorlesung hinausgeht (z. B. Zahlentheorie im Rahmen einer Bachelor-Mathematikvorlesung). Die Aufgaben sind in Ihrer Schwierigkeit so, dass ein Mitglied der Übungsleitung längere Zeit nachdenken muss, um Sie zu lösen (oder sogar irgendwann aufgibt). Wir haben aber für alle Aufgaben (hoffentlich richtige) Musterlösungen. Eine grobe Einschätzung der Schwierigkeit ist in der Anzahl der Totenköpfe rechts von der Aufgabe angegeben.

Keine dieser Aufgaben ist klausurrelevant! Bearbeiten Sie diese Aufgaben *nur*, wenn Sie zu viel Freizeit haben und die normalen Übungsaufgaben Sie nicht genug herausfordern!

Die Namen der ersten paar Einsender richtiger Lösungen zu je einer Aufgabe (u.U. auch zu Teilaufgaben wenn signifikant genug) falls gewünscht auf der Webseite veröffentlicht. Unter Umständen gibt es auch einen Sachpreis in Höhe von einer Tafel Schokolade solange der Vorrat reicht. Lösungen sind einzusenden an den “Puzzle-Meister” manuel.eberl@tum.de.

KNOBELAUFGABE 1.1. (*Ein bisschen Myhill–Nerode*)

10

Was sind die Myhill–Nerode-Klassen der folgenden Sprachen?

- (a) $L_1 = \{1^p \mid p \text{ prim}\}$ für das Alphabet $\Sigma_1 = \{1\}$
- (b) $L_2 = \{w \mid w \in \Sigma^*, w = w^R\}$ für ein beliebiges Alphabet Σ_2
- (c) $L_3 = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$ für ein beliebiges Alphabet Σ_3

Hierbei steht w^R wieder für das gespiegelte Wort, also $w^R = w_{|w|} \dots w_1$.

Einschätzung des Puzzle-Meisters: Diese Aufgabe erfordert nur das bisherige Wissen aus der Vorlesung.

Aufgabe c) wurde bereits von 2 Studenten gelöst. Für diese Aufgabe wird daher definitiv keine Schokolade mehr vergeben. ☺

KNOBELAUFGABE 1.2. (*Regularität von Permutationssprachen*)

10

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Wir definieren die Sprache $\text{Perm}(L)$ als die Sprache aller Permutationen von Wörtern in L , d.h.

$$\text{Perm}(L) = \{w_{\pi(1)} \dots w_{\pi(|w|)} \mid w \in L, \pi \in S_{|w|}\}$$

wobei S_n die Menge aller Permutationen der Zahlen von 1 bis n bezeichnet. Es ist z.B.

$$\text{Perm}(\{ad, abc\}) = \{ad, da, abc, acb, bac, bca, cab, cba\} .$$

- (a) Zeigen oder widerlegen Sie für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$: Wenn L eine Typ i -Sprache ist, so ist auch $\text{Perm}(L)$ Typ i .
- (b) Zeigen oder widerlegen Sie für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$: Wenn $\text{Perm}(L)$ eine Typ i -Sprache ist, so ist auch L Typ i .

Tipp: Auf jedem Alphabet Σ gibt es Sprachen, die nicht Typ 0 sind, denn die Menge der *Grammatiken* über Σ ist abzählbar, die Menge der *Sprachen* über Σ jedoch überabzählbar.

Noch ein Tipp: Um Aufgabe b) rigoros zu bearbeiten, ist etwas mehr Wissen über Typ 0-Sprachen hilfreich (aber nicht zwingend notwendig). Es kann sich lohnen, sich die Turingmaschinen-Charakterisierung später in der Vorlesung anzusehen. Sie können an dieser Stelle aber auch momentan noch etwas vage bleiben, wenn Sie zeigen wollen, dass eine Sprache nicht Typ 0 ist.

Einschätzung des Puzzle-Meisters: Abgesehen von den obigen Hinweisen erfordert diese Aufgabe nur das bisherige Wissen aus der Vorlesung.

KNOBELAUFGABE 1.3. (*Sprachen über einelementigen Alphabeten*)



- (a) Gibt es Sprachen über einem einelementigen Alphabet, die das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen erfüllen, aber nicht regulär sind?
- (b) Gibt es kontextfreie Sprachen über einem einelementigen Alphabet, die nicht regulär sind?

Einschätzung des Puzzle-Meisters: Diese Aufgabe ist schwierig, erfordert aber nur das bisherige Wissen aus der Vorlesung.

KNOBELAUFGABE 1.4. (*Primzahlen*)



Sei $\Sigma = \{0, \dots, 9\}$ und $P = \{w \mid \#w \text{ prim}\}$ die Menge aller Primzahlen in **Dezimal**kodierung.

- (a) Ist $P_{\text{pf}} = \{w \mid \exists u \in \Sigma^*. wu \in P\}$, die Sprache aller dezimalen Primzahlpräfixe, regulär?
- (b) Ist $P_{\text{sf}} = \{w \mid \exists u \in \Sigma^*. uw \in P\}$, die Sprache aller dezimalen Primzulsuffixe, regulär?
- (c) Ist P regulär?
- (d) Was sind die Myhill–Nerode-Klassen von P ?

Einschätzung des Puzzle-Meisters: Hier werden Sie zusätzlich zum Basiswissen aus der Vorlesung (Pumping-Lemma etc.) einige klassische zahlentheoretische Resultate über Primzahlen benötigen.